Über Regelflächen vierten Grades, deren Erzeugenden sich zu Quadrupeln gruppiren.

Von Adolf Ameseder.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. März 1880.)

I. Die Fläche mit einem Doppelkegelschnitt.

Art. 1. Unter den Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt ist jene, deren Erzeugenden auf den Doppellinien quadratische Punkt-Involutionen bestimmen, wegen ihrer schönen Eigenschaften, von besonderem Interesse.

Zum Ausgangspunkt der Untersuchung dieser Fläche — deren Symbol G^4 sein möge — eignet sich am besten ihre Entstehungsart durch ein Ebenenbüschel Δ und eine diesem projectivische, quadratische Tangentenebenen-Involution J^2, auf einem Kegel zweiten Grades K^2; da uns diese, und zwar mit Hilfe der Abhandlung: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“,[1] gestattet, die an der Fläche vorkommenden Constructionen zum grössten Theil graphisch durchzuführen und fast sämmtliche theoretisch zu lösen.

Wie wir im zweiten Artikel der Publication: „Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt“ [2] bereits bewiesen haben, müssen die erzeugenden Gebilde Δ und K^2 [J^2] eine derartige gegenseitige Lage haben, dass die Involutionsebene von J^2 und die durch die Spitze P von K^2 fixirte Ebene (ΔP) des erzeugenden Büschels, bezüglich des Trägerkegels K^2, **polar conjugirt** sind. Denn

---

[1] Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Jännerheft 1879.

[2] Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien vom 1. Februar 1880. Citate, welche sich auf diese Abhandlung beziehen, sind kurz mit I. A. bezeichnet.

legen wir — um den Beweis kurz zu wiederholen — durch einen Punkt β' des Doppelkegelschnittes D die ein conjugirtes Paar [von J^2] bildenden Tangentialebenen ε', an K^2; so schneiden diese die Doppelgerade Δ in den zwei Punkten α' und α'', welche mit β' verbunden, die in diesem Punkt sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ der Fläche G^4 liefern. Sowohl durch α', als auch durch α'' geht noch eine Erzeugende $\mathfrak{e}'$, respective $\mathfrak{e}''$, deren jede mit K^2 eine Tangentialebene ε', beziehungsweise ε_1'', festlegt. Ist nun (ΔP) der Ebene ε_i [von D] bezüglich K^2 polar conjugirt und nur dann schneiden sich die Ebenen ε_1', ε_1'' in einer in ε_i liegenden Geraden g, d. h. sie bilden ein conjugirtes Ebenenpaar der erzeugenden Involution J^2. In diesem Fall allein geschieht es, dass die Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$ sich einem Punkte von D — dem zweiten Schnittpunkt β'' dieses Kegelschnittes mit g — begegnend, mit $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ eine in sich geschlossene Gruppe — **ein Quadrupel** — bilden; und also nur unter den gemachten Prämissen beschreiben die Punkte α', α'' und β', β'' quadratische und zueinander projectivische Involutionen.

Entsprechende Punktepaare der Involutionen sind solche, die von einem Quadrupel der Erzeugenden fixirt werden; und umgekehrt wird dieses durch jene bestimmt. Beide Involutionen haben den Schnittpunkt B ihrer Träger [den Berührungsknoten der Fläche] zum Doppelpunkt; die sich in ihm schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_B'$ und $\mathfrak{e}_B''$ liegen mit Δ und der Tangente T von D in ihm in einer Ebene ε_B, welche die Fläche nur in B berührt, und eine Doppelebene der durch die Ebenen des Büschels Δ (ε) gebildeten Involution ist. [Vergleiche I. A. Art. 1.] Entsprechende Elemente dieser sind je zwei Ebenen ε', ε'', welche G^4 in denselben zwei — ein Paar bildenden — Punkten α', α'' von Δ berühren, und daher auf D conjugirte Punkte β' und β'' der Involution D $(\beta'\ \beta'')$ ausschneiden. Der zweite Doppelpunkt d von Δ $(\alpha'\ \alpha'')$ kann nun, nur durch die durch das Zusammenfallen zweier in einem Punkte β' sich treffenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, und zwar durch Drehung um diesen, bewirkte Coincidenz der Punkte α', α'' entstehen, und hat daher auch das Unendlichnaherücken jener zwei Erzeugenden zur Folge, welche mit $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ ein Quadrupel bilden, d. h. d ist der Schnittpunkt der singulären Erzeugenden e_1, e_2, diese bilden also auch ein Quadrupel und schneiden D in den

Cuspidalpunkten c_1, c_2, welche conjugirte Elemente von D $(\beta'\ \beta'')$ sind, und als solche eine durch das Centrum $\mathfrak{P}$ dieser Involution laufende Verbindungslinie haben. Aus $\mathfrak{P}$ kann man an D zwei Tangenten legen, die eine ist T und berührt in B, die andere T' hat den zweiten Doppelpunkt δ von D $(\beta'\ \beta'')$ zum Berührungspunkt. In diesem schneiden sich die zwei anderen singulären Erzeugenden e_{I}, e_{II}, welche auch ein Quadrupel constituiren und auf Δ die, durch d und B harmonisch getrennten, zwei weitere Cuspidalpunkte c_{I} und c_{II} fixiren.

Analoges gilt von den Cuspidalebenen. Jene $[v_1$ und $v_2]$, welche G^4 längs e_1, beziehungsweise e_2, berühren und dem Büschel Δ $(\varepsilon', \varepsilon'')$ angehören, werden durch die Doppelebenen ε_B und $(\Delta\delta)$ desselben harmonisch getrennt. Beide berühren also G^4 in demselben Punkt d, welchen wir auch **Doppel-Inflexionspunkt** dieser Fläche nennen können, nachdem jede Gerade seines Bündels, die in v_1 oder v_2 liegt, mit G^4 vier unendlich nahe, in ihm vereinigte Punkte gemein hat. Die Cuspidalebenen v_{I} und v_{II}, welche G^4 respective längs e_{I} und e_{II} berühren, schneiden diese Fläche in zwei eigentlichen Kegelschnitten C^2_{I}, beziehungsweise C^2_{II}, die in dem Punkte die Gerade T' zur Tangente haben. C^2_{I} trifft e_{I} noch in einem Punkt j_{I} und C^2_{II} in gleicher Weise e_{II} in j_{II}. Jede Gerade g der Ebene v_{I}, welche j_{I} enthält, schneidet G^4 nur noch in einem, und zwar auf C^2_{I} gelegenen Punkt, und hat also mit dieser Fläche drei benachbarte in j_{I} befindliche Punkte gemeinschaftlich. Da dies für jede Lage derselben gilt, erkennen wir in j_{I} und j_{II} Inflexionspunkte der Regelfläche. Ihre Verbindungslinie $\overline{j_{\text{I}}\, j_{\text{II}}}$ liegt in der Ebene $(\Delta\delta)$ und schneidet daher Δ in m.

Bemerken wir, dass die drei Inflexionspunkte einer ebenen Curve dritter Ordnung C^3 in einer Geraden liegen, dass demnach die durch $\overline{j_{\text{I}}\, j_{\text{II}}}$ und eine Erzeugende $\mathfrak{e}_m$, welche durch m läuft — gleichgiltig welche — bestimmte Curve m zum Inflexionspunkt haben muss, und dass G^4 auf Δ nur einen Inflexionspunkt d besitzt, so ist klar, dass die Gerade $\overline{j_{\text{I}}\, j_{\text{II}}}$ auch d enthält:

„Die zwei Inflexionspunkte und der Doppel-Inflexionspunkt der Fläche G^4 liegen auf einer Geraden.“

Reciprok kann jene Tangentialebene $(e_1\ T_1)$ im Cuspidalpunkt c_1, welche die Tangente T_1 von D in c_1 enthält, Rückkehr-

tangentenebene genannt werden — sie ist der geometrische Ort der Rückkehrtangenten aller G^4 eingeschriebenen, durch c_1 laufenden ebenen Curven. Auch die zwei Rückkehrtangentenebenen und die Doppelrückkehrtangentenebene ($\Delta\delta$) von G^4 schneiden sich in einer Geraden $\overline{\delta\Omega}$. Diese bildet mit $\overline{j_I\, j_{II}}$, Δ und $\overline{d\delta}$ einen harmonischen Vierstrahl.

Art. 2. Der aus irgend einem Punkt P des Doppelkegelschnittes D der Fläche umschriebene Kegel K^2 ist vom zweiten Grade und berührt die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten [siehe I. A. Art. 4].

Sein Schnitt mit der Ebene ($\Delta\delta$) ist daher ein Kegelschnitt $\mathfrak{k}^2$, welcher e_I und e_{II} in c_I, respective c_{II}, berührt und die Gerade $\overline{B\delta}$ in ihren Schnittpunkten λ_1, λ_2, mit $\overline{Pc_1}$ und $\overline{Pc_2}$ schneidet. Da nun B dem d bezüglich c_I und c_{II} harmonisch zugeordnet ist und e_I, e_{II} sich in δ begegnen, sehen wir, dass d der auf $\mathfrak{k}^2$ bezogene Pol von $\overline{B\delta}$ und daher $\overline{Pd}$ die Polare der Ebene (D) [oder ε_i] bezüglich K^2 ist.[1] Durchläuft P den Doppelkegelschnitt, so beschreibt dP den Kegel $(dD) \equiv \pi^2$.

„Der geometrische Ort der Polaren der Ebene des Doppelkegelschnittes D, bezogen auf die G^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2, ist der aus dem Doppel-Inflexionspunkt d dem Kegelschnitt D umschriebene Kegel π^2."

Jede Ebene des Büschels $\overline{dP}$ ist in der Ebene ε_i bezüglich K^2 polar conjugirt, daher auch $(\Delta P) \equiv \varepsilon$:

„Die Involutionsebene [od. Eb. v. D] der Regelfläche G^4 — deren Erzeugende auf den Doppellinien quadratische und projectivische Punkt-Involutionen bestimmen — ist irgend einer Ebene ε des Büschels Δ, und zwar bezüglich jenes Kegels K^2 **polar conjugirt**, dessen Spitze P in der Ebene ε liegt."

Jeder Kegel K^2 kann demnach als Träger einer Tangentenebenen-Involution J^2 betrachtet werden, welche ε_i zur Involutions-

---

[1] e_1 und e_2 berühren K^2 in c_1, respective c_2, die K^2 längs $\overline{Pc_1}$ und $\overline{Pc_2}$ tangirenden Ebenen enthalten daher auch e_1, beziehungsweise e_2, und schneiden sich demnach in der Geraden dP. Diese ist die auf K^2 bezogene Polare von ε_i.

ebene hat und mit Δ (ε) die G^4 erzeugt; diese Fläche ist die allgemeinste Fläche ihrer Art. Von zwei Ebenen, die bezüglich eines Kegels [zweiten Grades] polar conjugirt sind, schneidet immer eine denselben in reellen Erzeugenden; es trifft daher entweder D oder Δ den Kegel K^2 in reellen Punkten, d. h. die Regelfläche G^4 hat **mindestens** zwei reelle Cuspidalpunkte. Sind c_1, c_2 imaginär, so ist d ideell und B eigentlich; wogegen beide eigentliche Doppelpunkte sind, wenn c_I, c_{II} imaginär, also c_1, c_2 reell sind. Sind alle Cuspidalpunkte reell, so ist immer einer der Punkte d, B ideell, also innerhalb aller K^2 gelegen, wie ebenfalls aus der Relation $[c_I c_{II} d B] = -1$ resultirt. Coincidiren c_I, c_{II} mit B, berührt also Δ alle K^2 in B; so ist auch jede Ebene (ΔP), da sie K^2 längs $\overline{PB}$ tangirt, mit der durch diese Gerade gehenden Ebene von D polar conjugirt, und daher die durch diese Annahme bedingte Fläche $F_2^{4\prime}$, die wir in [I. A. Art. 9] bereits untersucht haben, eine Specialität von G^4.

Durch die oben ausgesprochene Eigenschaft des Kegels π^2 ist die Identität seiner Bedeutung, für die Fläche G^4, mit jener des Hyperboloides π^2 [s. I. A. Art. 6] für F^4 nachgewiesen. Mit Beziehung auf *(l. c.)* können wir die weiteren Eigenschaften von π^2 kurz citiren:

„Die Polarebenen eines Punktes P des Doppelkegelschnittes D bezüglich der Trägerkegel K^2 schneiden sich in einer Geraden $\overline{dP'}$, welche, wenn P den D durchläuft, den aus d dem D umschriebenen Kegel π^2 erfüllt. Die Punkte P und P' bestimmen eine Involution mit den Doppelpunkten c_1, c_2."

„Construirt man die der Ebene (D), bezüglich je zweier in einem Punkt von D sich schneidenden Erzeugenden von G^4, harmonisch conjugirte Gerade, so erhält man den Kegel π^2."

Umgekehrt schneidet jeder Strahl s des Bündels d die Fläche in zwei weiteren Punkten α_1', α_1'', welche durch d und die Ebene (D) — d. h. durch den Schnittpunkt p von s mit (D) — harmonisch getrennt werden, wovon man sich direct überzeugt, indem man durch Δ und s die Ebene legt, um so in d, p, α_1', α_1'' den Schnitt von s mit dem harmonischen Vierstrahl P [d, B, α', α''] zu erkennen. **„Die Ebene des Doppelkegelschnittes** — die Involutions-

ebene — **ist daher die auf die Regelfläche G^4 bezogene Polarebene des Doppel-Inflexionspunktes.**" Woraus weiter folgt, dass die zwei Erzeugenden e'_B, e''_B, welche sich im Berührungsknoten B schneiden, durch die Doppelgerade Δ und die Tangente T von D in B harmonisch getrennt werden.

Aus der Umkehrung des ersten Satzes in diesem Artikel geht hervor, dass der Doppel-Inflexionspunkt d und die Ebene (D) des Doppelkegelschnittes die gemeinschaftlichen Polargebilde — Pol und Polarebene — aller Trägerkegel K^2 sind, so dass jede Ebene E, welche d enthält, die Ebene (D) in einer Geraden schneidet, die die Polare von d bezüglich aller Kegelschnitte $(E\,K^2)$ ist. Geht die Ebene E auch durch das Centrum Ω der Involution $[(c_1\,c_2\,PP') = -1]$, so hat das System der Kegelschnitte $(E\,K^2)$ — weil P und P' sich bezüglich aller K^2 conjugirt sind — das Dreieck dPP' zum gemeinsamen Polardreieck, und sie schneidet die Regelfläche in einer Curve C^4_6, welche Inflexionstangenten zu Doppelpunktstangenten besitzt, weil eben $\overline{dPP'}$ das Doppelpunktsdreieck und die Kegelschnitte (EK^2) die vierfach bezührenden Kegelschnitte von C^4_6 sind.[1]

„Jede Ebene des Büschels, welches die Schnittlinie $\overline{d\Omega}$ der Rückkehrtangentenebenen von G^4 zur Axe hat, schneidet diese Regelfläche in einer Curve vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten **sämmtlich Inflexionstangenten** sind."

Der aus einem Punkt l der Geraden $\overline{d\Omega}$ der Fläche G^4 umschriebene Kegel K^{6}_{4} berührt nach (I. A. Art. 4) diese in einer Curve sechster Ordnung B^6, welche in den vier Cuspidal-

---

[1] Siehe: „Über rat. eb. Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen"; „Über rat. eb. Curven dritter und vierter Ordnung" und „Über vierfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten." Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, respective vom 20. März, 9. October und 3. Juli 1879. Vergleiche auch [I. A. Art. 6]; das Ebenenbüschel $\overline{d\Omega}$ geht aus dem an dieser Stelle besprochenen Kegel $\mathfrak{k}^2$ hervor; seine Bedeutung kann daher auch mittelst dieser Untersuchung nachgewiesen werden.

punkten Rückkehrpunkte hat, also D, ausser in c_1 und c_2, nur noch zweimal in P_1 und P_2 trifft. Die Gerade $\overline{lP_1}$ (dasselbe ist von $\overline{lP_2}$ zu sagen) berührt, als Kante des umschriebenen Kegels, die Fläche in P_1, und ist daher eine Doppelpunktstangente, also auch Inflexionstangente des Schnittes C^4_6 der Ebene $(d\Omega P_1)$ mit G^4 in P_1. In jedem Punkte, sowohl von $d\Omega$ als auch von D schneiden sich zwei Inflexions- oder Haupttangenten der Regelfläche, ihr geometrischer Ort ist, als Erzeugniss der zwei-zweideutigen Gebilde $\overline{d\Omega}$ (l) und D (P), eine Regelfläche T^6 sechsten Grades, welche D und $\overline{d\Omega}$ zu Doppellinien hat. Die Haupttangenten in einem Punkte von D sind gleichzeitig mit den durchgehenden zwei Erzeugenden von G^4 reell, beziehungsweise imaginär, so dass auch T^6 in c_1 und c_2 Cuspidalpunkte besitzt; und, die Realität dieser vorausgesetzt, von jeder Ebene des Büschels $\overline{d\Omega}$ — einer ihrer vierfachen Tangentialebenen — in zwei reellen und zwei imaginären Erzeugenden geschnitten wird, von welchen daher keine zwei einen Punkt von $\overline{d\Omega}$ gemeinschaftlich haben. Die Fläche T^6 hat ferner Δ zur Doppelerzeugenden, Ω zum Doppel-Inflexionspunkt und enthält auch e_{I} und e_{II} etc.

„Die Haupttangenten der Fläche G^4 in Punkten des Doppelkegelschnittes D erfüllen eine Regelfläche sechsten Grades T^6, welche D und $\overline{d\Omega}$ zu Doppellinien hat, etc.“

Art. 3. Unter den Berührungskegeln der Fläche G^4 nimmt der von den Doppeltangentenebenen umhüllte — und als solcher doppelt zu zählende — Kegel $\mathfrak{K}^2$ eine ausgezeichnete Stellung ein. Er kann noch bezeichnender als die Enveloppe aller jener Ebenen $(\alpha'\beta'\beta') = (\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'_1)$ definirt werden, welche G^4 nach eigentlichen Kegelschnitten C^2 schneiden, und ist demgemäss, als Erzeugniss des eindeutigen Scheines $\mathfrak{P}$ $(\overline{\beta'\beta''})$ [der Involution $D(\beta'\beta'')$] und der zweideutigen Reihe $\Delta(\alpha'\alpha'')$ — nachdem die auf einander liegenden Elemente T und B sich entsprechen — vom zweiten Grade.[1] Je zwei unendlich nahe, auf einander

[1] Siehe auch bezüglich des Folgenden (I. A. Art. 2). Das Erzeugniss zweier ein- zweideutiger Gebilde im Raum ist — wenn durch Bewegung einer Ebene entstanden — von der dritten Classe. Hier geht eine von den sich selbst entsprechenden drei Ebenen, der durch eine Gerade g [des

folgende dieser Ebenen, etwa E_c und $E_{c'}$ schneiden sich in einer Erzeugenden g des Kegels $\mathfrak{K}^2$, welche daher, weil genannte Ebenen benachbarte Doppeltangentenebenen von G^4 sind die Verbindungslinien $\overline{n_1 n_2}$ der nicht auf D liegenden Schnittpunkte von C^2 mit den in seiner Ebene E_c befindlichen Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ ist. Daraus folgt, dass der Kegel $\mathfrak{K}^2$ die Ebenen ε_B und $(e_1 e_2)$, respective längs $\overline{\mathfrak{P}B} = T$ und der Verbindungslinie $\overline{c_1 c_2}$ der Cuspidalpunkte c_1, c_2 berührt, von den Cuspidalebenen v_{I}, v_{II}, beziehungsweise längs $\overline{Pj_{\text{I}}}$ und $\overline{Pj_{\text{II}}}$ tangirt wird und mit G^4 eine Berührungscurve vierter Ordnung $\mathfrak{B}^4$ gemein hat, welche als Ort der Punkte n_1, n_2, in B einen Doppelpunkt besitzt und in den Inflexionspunkten j_{I}, j_{II} die Kanten $\overline{\mathfrak{P}j_{\text{I}}}$ und $\overline{\mathfrak{P}j_{\text{II}}}$ zu Tangenten hat. Diese Kanten berühren auch die Kegelschnitte C^2_{I}, C^2_{II} in den Punkten j_{I}, respective j_{II}, welche man sich auch durch das [durch die Coincidenz von $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ mit e_{I}, beziehungsweise e_{II} bewirkte] Zusammenfallen der Punkte n_1, n_2 entstanden denken kann. Aus welcher Thatsache, im Verein mit dem Umstand, dass C^2_{I} und C^2_{II} die Gerade $\overline{\delta\mathfrak{P}} = T'$ in δ tangiren, ersichtlich ist, dass die singulären Erzeugenden e_{I}, e_{II}, die auf C^2_{I}, respective C^2_{II} bezogenen Polaren von $\mathfrak{P}$, der Spitze des Doppelkegels sind.

Der dem Punkt $\mathfrak{P}$ bezüglich n_1, n_2 harmonisch conjugirte Punkt m liegt in der Doppel-Rückkehrtangentenebene $(\Delta\delta)$, nachdem diese und die Ebene $\varepsilon_B = (\Delta\mathfrak{P})$ — als Doppelebenen der durch die Tangentialebenen von G^4 in Punkten von Δ gebildeten Involution $\Delta(\varepsilon' \varepsilon'')$ — mit dem Ebenenpaar $(\Delta\mathfrak{e}')$, $(\Delta\mathfrak{e}'_1)$ ein harmonisches Büschel bildet, und $\mathfrak{P}$, d, n_1, n_2 der Schnitt desselben mit g ist. Die Verbindungslinie $\overline{m\alpha}$, von m mit dem Schnittpunkt der Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ ist daher dem Punkte $\mathfrak{P}$, und zwar bezüglich $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}'_1$ harmonisch conjugirt; sie berührt den Kegelschnitt

---

Bündels $\mathfrak{P}$] und die erz. Gebilde bestimmten zwei coaxialen Ebenenbüschel — bei jeder Lage von g — durch T; daher sind nur die zwei andern Ebenen Tangentialebenen. Vergleiche: „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-bis zweideutiger Elementargebilde, insbesondere der Regelflächen dritten Grades“ von Prof. Dr. Emil Weyr; erschienen 1871 bei Teubner in Leipzig.

$M^2 \equiv [(\Delta\delta), \mathfrak{K}^2]$ in m und umhüllt ihn, wenn α die Doppelgerade Δ durchläuft. Bemerken wir, dass jede einfache Tangente der G^4, welche $\mathfrak{P}$ enthält, in einer der Cuspidalebenen v_I, v_{II} liegen und demnach ihren Berührungspunkt auf e_I, beziehungsweise e_{II} haben muss, so erkennen wir in $\overline{m\alpha}$ auch die in Bezug auf den in der Ebene $(\mathfrak{e}'\mathfrak{e}'_1) = E_c$ befindlichen Kegelschnitt C^2 genommene Polare von $\mathfrak{P}$, weil diese als Berührungssehne der v_I, respective v_{II} angehörigen, aus $\mathfrak{P}$ an C^2 gezogenen Tangenten durch m laufend in $(\Delta\delta) = (e_I e_{II})$ liegt. Jeder Strahl des Bündels $\mathfrak{P}$ schneidet also G^4 in vier Punkten, welche zu zweien durch $\mathfrak{P}$ und $(\Delta\delta)$ harmonisch getrennt werden — G^4 selbst ist bezüglich $\mathfrak{P}$ und $(\Delta\delta)$ **involutorisch symmetrisch**; die letztere Ebene ist die Polarebene der Spitze $\mathfrak{P}$ des Doppelkegels $\mathfrak{K}^2$ bezüglich der behandelten Regelfläche.

Nach diesen Erläuterungen ist es mit Hilfe der reciproken Betrachtungen des vorhergehenden Artikels leicht, die Richtigkeit der folgenden Sätze nachzuweisen:

„Irgend eine Tangente t des Kegelschnittes M^2 — des Schnittes der Doppel-Rückkehrtangentenebene mit dem Doppelkegel $\mathfrak{K}^2$ — ist die Polare der Spitze $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}^2$ bezüglich des in der Ebene $(t\mathfrak{P})$ liegenden, G^4 eingeschriebenen Kegelschnittes C^2. Sie ist auch der geometrische Ort der Pole der, der Ebene $(t\mathfrak{P})$ bezüglich der Cuspidalebenen v_I, v_{II} harmonisch zugeordneten Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ in Bezug auf alle Kegelschnitte C^2 von G^4."

„Die Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ des Doppelkegels $\mathfrak{K}^2$ wird durch seine Spitze $\mathfrak{P}$ und den Kegelschnitt M^2, welcher die Doppelgerade im Berührungsknoten und die singulären Erzeugenden e_I, e_{II} in den Inflexionspunkten j_I, respective j_{II} berührt, harmonisch getheilt." (Vergleiche I. A. Art. 6.)

„Die Erzeugenden von G^4 bestimmen auf allen dieser Fläche eingeschriebenen Kegelschnitten C^2 quadratische Involutionen mit dem Centrum $\mathfrak{P}$. Dieses ist bezüglich irgend eines dieser Kegelschnitte C^2 jenem Punkte von Δ polar conjugirt, der sich in der Ebene von C^2 befindet." [Siehe auch I. A. Art 7.]

„G^4 hat mindestens zwei reelle Cuspidalebenen etc.“

„Die Haupttangenten der Regelfäche G^4, welche sich in den Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{K}^2$ befinden — also in Punkten der Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ — erfüllen eine Regelfläche sechsten Grades T_1^6, welche die Linie $\overline{dj_{\rm I}j_{\rm II}}$ der Inflexionspunkte zur vierfachen Geraden, Δ zur Doppelerzeugenden und $\mathfrak{K}^2$ zum Doppelkegel hat. Sie hat $c_1, c_2, j_{\rm I}, j_{\rm II}$ zu Cuspidalpunkten und e_1, e_2 zu singulären Erzeugenden etc.“

Die in einer Tangentialebene E_c von $\mathfrak{K}^2$ liegenden Haupttangenten t', t'' sind die Tangenten des durch E_c bestimmten Kegelschnittes C^2 in den Punkten n_1, n_2; sie schneiden sich in einem Punkt Θ, dessen Ort $\overline{dj_{\rm I}j_{\rm II}}$ ist.[1]

Art. 4. Die Ebenen ε_B und $(e_{\rm I}\, e_2)$, welche $\mathfrak{K}^2$ in seinen Schnittlinien T, respective $\overline{c_1 c_2}$ mit ε_i berühren, schneiden sich in $\overline{\mathfrak{P}d}$; diese Gerade ist die Polare von ε_i in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$. Jede Ebene N ihres Büschels schneidet G^4 in einer Curve C_6^4, die d zum Doppel-Inflexionspunkt und die einander bezüglich $\overline{\mathfrak{P}d}$ und der Schnittlinie $(N\varepsilon_i)$ harmonisch conjugirten Schnitterzeugenden $\overline{\mathfrak{P}n_1 n_2}$, $\overline{\mathfrak{P}n'_1 n'_2}$ mit $\mathfrak{K}^2$ zu Doppeltangenten, mit den Berührungspunkten n_1, n_2, beziehungsweise n'_1, n'_2 hat. Die $\mathfrak{K}^2$ längs den bezeichneten Kanten tangirenden Ebenen E_c, E'_c schneiden sich in einer Geraden $\overline{\beta'\beta''\mathfrak{P}}$ der Polarebene von $\overline{d\mathfrak{P}}$, und fixiren demnach auf G^4 ein Erzeugende-Quadrupel $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}'_1$, $\mathfrak{e}'_2$, dessen Elemente einzeln durch die gleich bezeichneten der Punkte n_1, n_2, n'_1, n'_2 laufen. Daraus folgt nun, nachdem diese Punkte der Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ sind, und die Geraden $\overline{n_1 n'_1}$, $\overline{n_2 n'_2}$, als in N und

---

[1] Obwohl T_1^6 der Fläche T^6 (Art. 2) reciprok ist, wollen wir den Ort des Punktes Θ direct bestimmen. Er ist dem Punkte m bezüglich der auf $e_{\rm I}$, respective $e_{\rm II}$ gelegenen Berührungspunkte b', b'', der aus $\mathfrak{P}$ an C^2 gezogenen Tangenten, harmonisch conjugirt; und kann daher auch als der in Bezug auf $e_{\rm I}$, $e_{\rm II}$, dem Berührungspunkt m der variablen Tangente $\overline{m\alpha}$ von M^2, harmonisch conjugirte Punkt definirt werden. Verbinden wir m mit $(e_{\rm I}\, e_{\rm II}) = \delta$ und ziehen wir auch in dem zweiten Schnitt m', dieser mit M^2, an diesen Kegelschnitt die Tangente, so schneidet diese $\overline{m\alpha}$ in einem Punkt, der offenbar als Pol von $\overline{mm'}$ bezogen auf M^2, von dieser Geraden durch $e_{\rm I}$, $e^{\rm II}$ harmonisch getrennt wird und daher mit Θ identisch ist. Sein Ort ist die Polare $\overline{j_{\rm I}j_{\rm II}d}$ von $(e_{\rm I}\, e_{\rm II})$ bezüglich M^2.

beziehungsweise $(\beta' \Delta)$, $(\beta'' \Delta)$ liegend, sich in d_1 schneiden, dass die Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ [des Doppelkegels] aus dem Doppel-Inflexionspunkte d durch einen Kegel[1] zweiten Grades projicirt wird, und dass je vier ihrer Punkte, welche auf einem Quadrupel von Erzeugenden (von G^4) liegen, sich in einer Ebene des Büschels $\overline{d\mathfrak{P}}$ befinden, und umgekehrt.

Die Ebenen E_c und E_c schneiden G^4 in zwei eigentlichen Kegelschnitten C^2, C_1^2, welche sich in β' und β'' treffen und beziehungsweise durch n_1, n_2 — n_1', n_2' gehen; sie bilden ein Paar:

„Die Kegelschnitte der Regelfläche G^4 gruppiren sich zu **conjugirten Paaren**, welche auf dem Doppelkegelschnitt D die Involution $(\beta' \beta'')$ mit dem Centrum $\mathfrak{P}$, und auf dem Doppelkegel $\mathfrak{K}^2$ die Involution E_c, E_c', mit der Involutionsebene $(D) = \varepsilon_i$ bestimmen.

„Beide Involutionen erzeugen respective mit den geraden Involutionen $\Delta(\alpha\alpha')$, $\Delta(\varepsilon\varepsilon')$ die Fläche G^4."

„Die Ebenen eines Kegelschnittpaares C^2, C_1^2 bestimmen auf G^4 ein Erzeugende-Quadrupel, welches sie ausser in zwei Punkten von D in vier Punkten schneidet, die der Curve $\mathfrak{B}^4$ angehören und in einer Ebene des Büschels $\overline{d\mathfrak{P}}$ liegen."

Der aus dem Doppel-Inflexionspunkt d einem Kegelschnitt C^2 umschriebene Kegel $\mathfrak{k}^2$ berührt die Cuspidalebenen v_1, v_2 längs der singulären Erzeugenden e_1, e_2 — weil jede G^4 eingeschriebene Curve, also auch C^2 die v_1, v_2 in Punkten von e_1, beziehungsweise e_2 berührt — und hat also mit G^4 noch einen Kegelschnitt gemein. Dieser ist kein anderer als C_1^2, welcher C^2 conjugirt ist, denn der aus d ihm umschriebene Kegel $\mathfrak{k}_1^2$ hat mit $\mathfrak{k}^2$ die Kanten $d\,\overline{n_1 n_1'}$, $d\,\overline{n_2 n_2'}$, $\overline{d\beta'}$ und $\overline{d\beta''}$ gemein und berührt ihn längs e_1 und e_2; ist also mit ihm identisch. Aus demselben Grund sind auch die aus $\delta = (e_{\text{I}}\, e_{\text{II}})$ den C^2, C_1^2 umschriebenen Kegel $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}_2^1$ identisch; sie

---

[1] Folgt auch, in Folge des oben von der Curve C_4^c (mit einem Doppel-Inflexionspunkte in d) Gesagten, aus dem Aufsatz: „Über rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen."

haben nämlich $\overline{d\beta'}$, $\overline{d\beta''}$ gemein und berühren sich längs e_{I} und e_{II}:

„Durch jedes Paar conjugirter Kegelschnitte der Regelfläche G^4 kann man zwei Kegel zweiten Grades legen, deren Gesammtheit demgemäss aus zwei projectivischen Kegelbüscheln besteht. Während das eine Büschel die Fläche längs den singulären Erzeugenden e_1, e_2 tangirt und den Doppel-Inflexionspunkt d zur Spitze hat — wird dieselbe von den andern längs den singulären Erzeugenden e_{I}, e_{II} berührt, dieses hat also δ zur Spitze. Die beiden Kegelbüschel erzeugen die Fläche G^4.

Unter allen Kegelschnitten von G^4 ist jener, in welchem diese Fläche von der Ebene der singulären Erzeugenden e_1, e_2 geschnitten wird, und welcher diesen in den Cuspidalpunkten c_1, c_2 berührt, besonders bemerkenswerth. Umschreiben wir diesem Kegelschnitt C_0^2 aus δ den Kegel K_0^2, so berührt dieser G^4 in e_{I} und e_{II}, und schneidet sie in einem Kegelschnitt, der auch durch c_1, c_2 laufen soll, daher, weil durch diese Punkte nur C_0^2 geht, mit C_0^2 identisch ist.[1] Der Kegel K_0^2 hat mit G^4 in jedem Punkte von C_0^2 zwei unendlich nahe Punkte gemein, d. h. C_0^2 ist ein **Berührungskegelschnitt.**

Ein anderer Beweis kann auch mittelst der Methode der Projection erbracht werden. Wir umschreiben aus δ der Regelfläche den Kegel K^2; dieser ist nach [I. A. Art. 4] vom zweiten Grade und berührt G^4 in einer Raumcurve B^4 vierter Ordnung, die δ zum Doppelpunkt hat und in den vier Cuspidalpunkten die singulären Erzeugenden tangirt. Diese Berührungscurve zerfällt nun im vorliegenden Fall in e_{I}, e_{II}, weil K^2 die G^4 längs dieser berühren muss, und noch eine Curve zweiten Grades B^2, welche e_1, e_2, respective in c_1, c_2 berühren soll, also mit C_0^2 identisch ist:

[1] Dass durch c_1 nur ein Kegelschnitt C_0^2 läuft, folgt daraus, dass man durch $\overline{c_1\mathfrak{P}}$ als einer Kante von $\mathfrak{K}^2$ nur eine Tangentialebene an diesen — von den Ebenen der Kegelschnitte umhüllten — Kegel legen kann. Auch ist daraus ersichtlich, dass C_0^2 aus zwei coincidirenden Kegelschnitten entsteht. Das Gesagte erhellt auch aus [I. A. Art. 8], weil jede Curve, die durch C_1 geht und hier keinen Rückkehrpunkt hat, tangiren muss, etc.

„Der aus dem Schnittpunkt δ der singulären Erzeugenden e_{I}, e_{II} der Regelfläche G^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades berührt sie in einem Kegelschnitt C_0^2, welcher die singulären Erzeugenden e_1, e_2 in den Cuspidalpunkten c_1, c_2 tangirt."

In diesem Satz hat die folgende Entstehungsart von G^4 ihre Begründung:

„Gleitet eine Gerade an einen Kegel zweiten Grades K_0^2, diesen in Punkten eines Kegelschnittes C_0^2 berührend, und einer festen Geraden Δ; so erzeugt sie eine Regelfläche G^4, welche etc."

Auch Δ, D, K_0^2 C_0^2 können als Leitlinien genommen werden; doch muss die Annahme so getroffen werden, dass $(B_1\, d_1\, c_1\, c_2) = = -1$ ist etc.

Art. 5. Wenden wir uns wieder zur Untersuchung der durch die conjugirten Kegelschnittpaare bestimmten Kegelbüschel. Zwei entsprechende Kegel $\mathfrak{k}^2$, $\mathfrak{k}_2$ dieser Büschel berühren sich in den Punkten β', β'' — weil diese die Schnittpunkte der auf beiden liegenden Kegelschnitte C^2, C_1^2 sind —; ihre gemeinschaftlichen Tangentialebenen τ', τ'' schneiden sich in der Verbindungslinie $\overline{d\delta}$ ihrer Spitzen und enthalten die vier Tangenten t_1', t_2', t_1'', t_2'' der C^2, C_1^2 in β', respective β''. Von diesen Tangenten schneiden sich je zwei — so t_1', t_1'' — in einem Punkte α' von $\overline{d\delta}$, aus welchem man ausser der Ebene (C^2) noch eine Tangentialebene an $\mathfrak{K}^2$ legen kann, die ebenfalls G^4 in einem Kegelschnitt C_{I}^2 schneidet, dessen Tangenten t_{I}', t_{I}'', in den auf D gelegenen Punkten β_{I}', β_{II}'', sich auch in dem Punkt α' treffen. Während also in jedem Punkt β von D sich zwei Tangenten t begegnen, schneiden sich in irgend einem Punkt α' von $\overline{\delta d}$ vier; die Beziehung zwischen beiden Systemen ist zwei- vierdeutig, und ihr Erzeugniss — nachdem sich δ doppelt selbst entspricht — eine Regelfläche F^6, sechsten Grades.

„Die Tangenten der Kegelschnitte der Regelfläche G^4, in ihren auf dem Doppelkegelschnitt D gelegenen Punkten erfüllen eine Regelfläche sechsten Grades F^6, welche $\overline{d\delta}$ zur vierfachen und D zur Doppellinie hat."

Diese Fläche hat, — wie leicht zu zeigen ist — T' zur Doppel-Erzeugenden, c_1, c_2 zu Cuspidalpunkten, e_1, e_2 zu singulären Erzeugenden und δ zum Berührungsknoten. Sie wird von $\mathfrak{K}^2$ in einer Raumcurve sechster Ordnung berührt und aus irgend einem Punkt des Raumes durch einen Kegel sechster Classe, zehnter Ordnung, projicirt etc.

Art. 6. Die im Schluss des [Art. 7. I. A.] erörterte Entstehungsart von F^4 durch projectivische Kegelsysteme, specialisirt sich für G^4 folgendermassen:

„Sind D und M^2 zwei Kegelschnitte, die sich in einem Punkte B schneiden, und e_{I}, e_{II}, die aus dem zweiten der Ebene (M^2) angehörigen Punkt δ von D an M^2 gelegten Tangenten, so schneiden sich je zwei correspondirende, d. h. aus zwei auf einer Tangente τ von M^2 liegenden Punkten x', x'' der Geraden e_{I}, e_{II} dem Kegelschnitt D umschriebene Kegel in einem weiteren Kegelschnitt C^2, dessen geometrischer Ort eine Regelfläche G^4 ist.“ [1]

Diese Fläche hat D und die Tangente Δ von M^2 in B zu Doppellinien, e_{I}, e_{II} zu singulären Erzeugenden, und die Berührungspunkte dieser mit M^2 zu Inflexionspunkten. Der mit dem Schnitt $\mathfrak{P}$, der Tangenten von D in B und δ, dem M^2 umschriebene Kegel ist ihr Doppelkegel.

Und reciprok:

„Sind π^2 und $\mathfrak{K}^2$ zwei in einem Punkt B sich berührende Kegel und e_1, e_2 die in der zweiten, aus der Spitze d von π^2 an $\mathfrak{K}^2$ gezogenen Tangentenebene liegenden Kanten von π^2, so bestimmen je zwei correspondirende, d. h. in einer Kante des Kegels π^2 sich schneidende Ebenen von e_1 und e_2 auf $\mathfrak{K}^2$ zwei Kegelschnitte, welcher ausser $\mathfrak{K}^2$ noch einen Kegel K^2 gemein haben. Die Enveloppe dieses Kegels ist eine

---

[1] Die Schnitte β', β'' von C^2 mit D bilden in der That — als die Berührungspunkte der aus dem Schnittpunkt r, von $\tau = \overline{x'x''}$ und der Ebene (D), an D gezogenen Tangenten — eine Involution, mit den Doppelpunkten B und δ. Dass durch β', β'' noch ein zweiter Kegelschnitt C_1^2 geht, folgt daraus, dass die Scheine von $e_{\mathrm{I}}\,(x')$ und $e_{\mathrm{II}}\,(x'')$ in r zwei Doppelstrahlen haben, deren jeder auf e_{I}, e_{II} zwei entsprechende Punkte x', x'' bestimmt.

Regelfläche G^4, welche $\overline{Bd}$ zur Doppelgeraden, e_1, e_2 zu singulären Erzeugenden, d zum Doppel-Inflexionspunkt und $\mathfrak{K}^2$ zum Doppelkegel hat. Die auf $\mathfrak{K}^2$ bezogene Polarebene schneidet π^2 im Doppelkegelschnitt von G^4, welcher auch als Ort der Spitze von K^2 definirt werden kann."

Aus dieser Erzeugungsart der behandelten Fläche ist auch zu ersehen, dass jeder [Träger-] Kegel K^2 den Doppelkegel $\mathfrak{K}^2$ doppelt berührt, und dass $\mathfrak{K}^2$ dieselben Tangentialebenen noch mit einem zweiten Trägerkegel K_1^2 gemein hat, der mit dem ersten ein conjugirtes Paar bildet.

Wie in der letzten Anmerkung für C^2, C_1^2 können wir hier für K^2, K_1^2 zeigen, dass ihre Spitzen β', β'' auf D die Involution, mit dem Centrum $\mathfrak{P}$ constituiren. Denn umschreiben wir umgekehrt aus β' und β'' der G^4 die Kegel K^2, K_1^2, so werden beide die durch $\overline{\beta'\beta''}$ an $\mathfrak{K}^2$ gelegten Tangentialebenen E_c, E'_c berühren, und zwar, wenn wir die im Anfang des Art. 3 eingeführte Bezeichnung benützen, der Kegel K^2 längs $\overline{\beta' n_2}$, respective $\overline{\beta' n'_2}$, und der Kegel K_1^2 längs $\overline{\beta'' n_1}$, beziehungsweise $\overline{\beta'' n'_1}$. Diese Kegel berühren sich auch doppelt, und zwar in den Schnittpunkten $\psi_1 = [\overline{\beta' n_2}, \overline{\beta'' n_1}]$ und $\psi_2 = [\overline{\beta'' n'_2}, \overline{\beta'' n'_1}]$, die auf der Schnittlinie Φ der Ebenen $(e_1 e_2)$ und $(e_{\text{I}} e_{\text{II}})$ eine quadratische Involution, welche mit der Involution $\mathfrak{K}^2$ $(E_c E'_c)$ perspectivisch ist und d sowie den Schnitt ρ von Φ mit ε_i zu Doppelpunkten hat, beschreiben. Die Berührungskanten $\overline{\beta' n_1}$, $\overline{\beta'' n_2}$ erfüllen bei Drehung von E_c um $\mathfrak{K}^2$ eine Fläche F_1^6, welche der im vorhergehenden Artikel besprochenen [zufolge ihrer Entstehung] reciprok ist; für sie gilt der Satz:

„Die Berührungskanten der Trägerkegel [der G^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades] mit den Tangentialebenen des Doppelkegels $\mathfrak{K}^2$ erfüllen eine Regelfläche sechsten Grades F_1^6, welche $\Phi = d\rho$ und D zu Doppellinien und Δ und $\overline{c_1 c_2}$ zu Doppelerzeugenden besitzt. Jede Ebene des Büschels Φ berührt sie vierfach und jede des Kegels $\mathfrak{K}^2$ doppelt."

Betrachten wir nun nochmals den Schnitt einer Tangentenebene E_c von $\mathfrak{K}^2$ mit G^4, so sehen wir, dass die Tangenten des Kegelschnittes C^2 in den Punkten n_1, n_2, jene in den Punkten

β', β'', und schliesslich die Geraden $\overline{\beta' n_2}$, $\overline{\beta'' n_1}$, je eine Regelfläche sechsten Grades T_1^6, F^6 und F_1^6 erzeugen; wenn E_c den Kegel $\mathfrak{K}^2$ umhüllt. Der Punkt $(\overline{\beta' n_1}, \overline{\beta'' n_2})$ beschreibt die Gerade $\overline{d\rho}$, der Schnitt der Tangenten in n_1, n_2 die Gerade $\overline{dj_{\rm I} j_{\rm II}}$ und der, der Tangenten in β', β'' die Gerade $\overline{d\delta}$; alle drei Geraden liegen in der Doppelrückkehrtangentenebene (Δd) und schneiden sich im Doppel-Inflexionspunkt d. Ihre Lagen-Relation unter einander und gegen die Singularitäten von G^4 drückt sich in den folgenden Gleichungen aus:

$$(\Delta, \overline{d\rho}, dj_{\rm I} j_{\rm II}, \overline{d\delta}) = -1$$
$$(\Delta, \overline{d\delta}, \overline{d\rho}, \overline{d\Omega}) = -1$$
$$(\overline{d\mathfrak{P}}, \overline{d\rho}, e_1, e_2) = -1$$
$$(\overline{\delta\delta}, \overline{\delta B}, e_{\rm I}, e_{\rm II}) = -1,$$

während die Beziehung zwischen Δ, D und $\mathfrak{K}^2$ zu dem folgenden Satz Veranlassung gibt:

„Gleitet eine Gerade an einem Kegelschnitt D, einer Geraden Δ, welche D in B schneidet, und einem Kegel zweiten Grades $\mathfrak{K}^2$, der die Tangente T von D in B zur Kante hat und in ihr die Ebene $(T\Delta)$ berührt, so erzeugt sie eine Fläche G^4."

Art. 7. Wir haben bemerkt, dass je zwei ein Paar bildende Kegel K^2 und K_1^2 sich in zwei conjugirten Punkten der Involution Φ (ψ_1, ψ_2) berühren. Ihr Schnitt mit der Ebene (e_1, e_2) besteht aus zwei Kegelschnitten z^2, z_1^2, welche sich in ψ_1 und ψ_2 schneiden und — weil alle der Regelfläche G^4 umschriebenen Kegel die singuläre Erzeugenden in den Cuspidalpunkten berühren — in den ihnen auch gemeinsamen Punkten c_1, c_2 die Geraden e_1, beziehungsweise e_2 zu Tangenten haben, also identisch sind. Jedes Kegelpaar K^2, K_1^2 schneidet daher die Ebene $(e_1\ e_2)$ und — aus demselben Grund — die Ebene $(e_{\rm I}\ c_{\rm II})$ nur in einem Kegelschnitt z^2, respective z_2; beide Kegelschnitte haben das Punktepaar ψ_1, ψ_2 gemein und entsprechen sich projectivisch:

„Je zwei conjugirte, der Fläche G^4 umschriebene Kegel zweiten Grades schneiden sich in zwei Kegelschnitten z^2, z_2, deren Gesammtheit aus zwei projectivischen Büscheln besteht. Das eine Kegelschnittsbüschel liegt in der Ebene $(e_1\ e_2)$ der singulären

Erzeugenden e_1, e_2 und berührt diese in den Cuspidalpunkten c_1, c_2 — das andere in der Ebene der zwei anderen singulären Erzeugenden e_I, e_{II} und hat diese analog in c_I, c_{II} zu Tangenten."

„Entsprechende Kegelschnitte schneiden sich in conjugirten Punkten der Involution Φ (ψ_1, ψ_2) und fixiren ein Kegelpaar, dessen Enveloppe G^4 ist."

Für die Trägerkegel K^2 haben wir noch zu erwähnen, dass sie mit irgend zwei in einem Punkt des Doppelkegelschnittes D sich schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ zwei perspectivische Ebenenbüschel mit dem Durchschnitt (D) bestimmen. Reciprok schneiden die G^4 eingeschriebenen Kegelschnitte C^2 je zwei Erzeugende $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, welche sich in einem Punkt von Δ begegnen, in zwei perspectivischen Punktreihen mit dem Centrum $\mathfrak{P}$.

Art. 8. Ein Hyperboloid h^2 bestimmt auf der Fläche G^4 eine Raumcurve achter Ordnung R^8, die auf Δ zwei und auf D vier Doppelpunkte besitzt. Enthält nun das Hyperboloid h^2 ein Paar conjugirter Kegelschnitte C^2, C^2_1, so hat es mit G^4 noch eine Curve vierter Ordnung R^4 gemein, welche — weil (C^2, C^2_1) zwei Doppelpunkte auf D hat — vier Doppelpunkte besitzt, von denen zwei auf Δ und zwei auf D liegen, die also aus einem Quadrupel von Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'_1$ und $\mathfrak{e}''_1$ besteht. Umgekehrt wird jedes durch ein Quadrupel gelegte Hyperboloid auf G^4 eine Curve R^4 fixiren, die zwei Punkte von D zu Doppelpunkten hat, auf Δ jedoch keinen Punkt besitzt — also aus zwei conjugirten Kegelschnitten C^2, C^2_1 zusammengesetzt ist:

„Jedes Quadrupel von Erzeugenden der Fläche G^4 liegt mit irgend einem ihr eingeschriebenen Kegelschnittspaar auf einem Hyperboloid."

Weil zur vollständigen Bestimmung von h^2 — wenn C^2, C^2_1 gegeben ist — noch ein Punkt α von Δ — und wenn $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'_1$, $\mathfrak{e}''_1$ angenommen wurde — ein Punkt β von D beliebig gewält werden darf. Es schneiden sich also auch je zwei Hyperboloide, deren jedes durch ein Kegelschnittspaar gelegt ist und die einen Punkt α von Δ gemein haben in vier Erzeugenden, welche ein Erzeugende-Quadrupel von G^4 bilden und diese Fläche erfüllen, wenn α die Gerade Δ durchlauft. Umgekehrt haben zwei Hyperboloide,

welche durch einen Punkt β von D und je ein Erzeugende-Quadrupel bestimmt sind noch zwei Kegelschnitte gemein, welche ein conjugirtes Paar der G^4 eingeschriebenen Kegelschnitte bilden, und diese Fläche zum Ort haben.

Nachdem ein Quadrupel von Erzeugenden mit Δ und der Verbindungslinie $\overline{\beta'\beta''}$, seiner auf D befindlichen Punkte ein Tetraeder bildet, kann man sich G^4 auch folgendermassen entstanden denken:

„Deformirt sich ein Tetraeder derart, dass die Endpunkte zweier Gegenkanten, beziehungsweise auf einer festen Geraden Δ und einem Kegelschnitt D, der Δ in B schneidet quadratische Involutionen bestimmen, die beide B zum Doppelpunkt haben, so beschreiben die andern vier Kanten eine Regelfläche G^4."

Anmerkung. Diese Entstehungsart gibt, auf die Regelfläche mit einer allgemeinen Doppellinie dritter Ordnung D^3 übertragen, die Bedingung an, unter welcher sich die Erzeugenden derselben zu Quadrupeln vereinigen. Sie lässt sich, wie man aus dem Vergleich mit dem im dritten Artikel des Aufsatzes: „Über rationale Regelflächen vierten Grades" [in Hoppes Archiv für Mathematik und Physik, Jahrgang 1880] Gesagten ersieht, durch den folgenden Satz ausdrücken:

„Deformirt sich ein Tetraeder, welches einer Raumcurve dritter Ordnung D^3 eingeschrieben ist, derart, dass zwei Gegenkanten eine windschiefe Fläche zweiten Grades h^2 beschreiben, so erzeugen die vier andern Kanten — ein Quadrupel bildend — eine Regelfläche vierten Grades g^4, welche D^3 zur Doppellinie hat."

Nennen wir die Ecken des Tetraeders A, B, C, D, und sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ die h^2 erzeugenden Gegenkanten, so beschreiben die Punkte A, B auf D^3 eine quadratische Involution, welche auch von den Punkten C, D beschrieben wird, und kurz als die von der zweipunktigen Geraden-Schaar der h^2 auf D^3 gebildete Involution bezeichnet werden kann.

Diese Involution kann noch besser als aus den zwei projectivischen Involutionen (AB) und (CD), welche dieselben zwei Doppelpunkte d_1 und d_2 besitzen, bestehend gedacht werden. Beide Involutionen erzeugen die Regelfläche vierten Grades g^4, welche D^3 zur Doppellinie hat; ihre Projectivität ist durch drei Punktepaare der Reihen $(A) \pi (B)$, oder $(A) \pi (C)$, oder auch $(B) \pi (C)$, $(B) \pi (D)$ bestimmt.

Coincidirt ein Punkt A' der Reihe (A) mit dem ihm entsprechenden Punkt B' von (B), so werden auch die diesen Punkten bezüglich d_1, d_2 involutorisch conjugirten Punkte C' und D' von (C), respective (D) zusammenfallen. Die zwei Doppelpunkte α, β der Reihen (A), (B) sind daher den Doppelpunkten γ, δ von (C) und (D), und zwar α dem γ und β dem δ, harmonisch zugeordnet. Daraus folgt:

„Die Regelfläche g^4 hat vier Tangenten T_α, T_β, T_γ und T_δ von D^3 zu Erzeugenden. Die Berührungspunkte α, β, γ und δ dieser werden durch die Doppelpunkte d_1, d_2 harmonisch getrennt, und zwar α von γ und β von δ. Die Geraden $\overline{\alpha\gamma}$ und $\beta\delta$ sind die g^4 und h^2 gemeinschaftlichen Erzeugenden."

Das Hyperboloid h^2 hat auch die Tangenten T_1, T_2 von D^3 in d_1 und d_2 zu Erzeugenden.

Den Punkten d_1, d_2 entsprechen, als Elementen von (A) oder (B), in (C) und (D) je zwei Punkte c'_1, c''_1, beziehungsweise c'_2, c''_2, welche Cuspidalpunkte von g^4 sind und in angegebener Ordnung paarweise durch d_1 und d_2 harmonisch getrennt werden. Sie liefern, mit diesen verbunden, die vier singulären Erzeugenden $\overline{d_1c'_1}$, $\overline{d_1c''_1}$, $\overline{d_2c'_1}$ und $\overline{d_2c''_2}$ von g^4, und unter einander (je einmal) verbunden die Geraden $\overline{c'_1c''_1}$, $\overline{c'_2c''_2}$, welche auf h^2 liegen.

Umschreiben wir der Curve D^3 aus irgend einem ihrer Punkte P den Kegel l^2, so werden die Kanten desselben durch die erzeugende Involution auf einander involutorisch bezogen. Die Doppelelemente dieser Involution verbinden P mit den Punkten d_1 und d_2; der Schein derselben ist das aus P dem Hyperboloid h^2 umschriebene Ebenenbüschel, welches

die der D^3 einpunktig schneidenden Schaar angehörige, durch P laufende Erzeugende $\overline{Ps}$ von h^2 zur Axe hat. Diese Erzeugende muss auch in den l^2 längs $\overline{Pd_1}$ und $\overline{Pd_2}$ berührenden Ebenen liegen, und ist demnach die auf l^2 bezogene Polare der Ebene (Pd_1d_2). Diese Ebene ist auch die Polarebene von $\overline{Ps}$ bezüglich jenes die Fläche g^2 projicirenden Kegels K^2 (zweiten Grades), dessen Spitze P ist; nachdem die Ebenen $(Pc'_1c''_1)$ und $(Pc'_2c''_2)$ — weil $\overline{c'_1c''_1}$ $\overline{c'_2c''_2}$ Erzeugende von h^2, und zwar der Schaar $\overline{AC}$ sind — sich in $\overline{Ps}$ schneiden, und die K^2 längs $\overline{Pc'_1}$, $\overline{Pc''_1}$, — $\overline{Pc'_2}$, $\overline{Pc''_2}$ tangirenden Ebenen die Geraden $\overline{Pd_1}$, respective $\overline{Pd_2}$ zu Schnittlinien haben.

Durchläuft P die Curve D^3, so beschreibt $\overline{Ps}$ die eine Schaar von h^2 und (Pd_1d_2) das Büschel $\overline{d_1d_2}$: „Die Polarebenen der die Doppellinie D^3 einmal schneidenden Erzeugenden-Schaar des Hyperboloides h^2 bezüglich der der Fläche g^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades bilden ein Büschel, welches die Verbindungslinie der zwei Doppelpunkte d_1, d_2, der von der zweiten Erzeugenden-Schaar auf D^3 gebildeten Involution zur Axe hat; und umgekehrt.“ [1]

---

[1] Bemerken wir, dass D^3 eine allgemeine Raumcurve dritter Ordnung ist, und dass d_1, d_2 beliebig gewählt werden können, so ist durch Obiges auch die Evidenz des folgenden Satzes erwiesen:

„Eine Gerade $\overline{Ps}$, welche eine Raumcurve dritter Ordnung R^3 einmal [in P] schneidet, bestimmt mit ihr ein Hyperboloid h^2 vollkommen. Umschreiben wir aus P der R^3 den Kegel l^2 und construiren die Polarebene von Ps bezüglich l^2, so wird diese R^3 in zwei Punkten d_1, d_2 schneiden, die fest bleiben, wenn $\overline{Ps}$ die Fläche h^2 durchläuft; umgekehrt wird $\overline{Ps}$ h^2 beschreiben, wenn sich die Ebene $(Pd_1\,d_2)$ um $\overline{d_1\,d_2}$ dreht.“

Die R^3 zweimal schneidende Erzeugende-Schaar bestimmt auf R^3 eine quadratische Involution mit den Doppelpunkten d_1, d_2. — Die Beziehung zwischen $\overline{d_1\,d_2}$ und h^2 ist eine eindeutige und involutorische, so dass derart das Secantensystem von R^3 auf das System der durch R^3 gehenden Linienflächen zweiten Grades projectivisch bezogen ist. Dreht sich $\overline{d_1d_2}$ um d_1, so bilden alle h^2 ein Büschel, dessen Elemente sich ausser in R^3 in der Tangente t_1, dieser im Punkte d_1 schneiden. Diese Tangente

Von den weiteren Eigenschaften der Fläche g^4 — welche den, in den letzten fünf Artikeln gefundenen Eigenschaften der Fläche G^4 analog sind und ähnlich bewiesen werden können — wollen wir hier nur erwähnen, dass die ihr eingeschriebenen Kegelschnitte sich auch zu Paaren gruppiren, deren jedes mit irgend einem Quadrupel von Erzeugenden auf einem Hyperboloid liegt, und auf D^3 ein Punktepaar der Involution (AC) fixirt.

Dass ferner die Fläche g^4 zwei Berührungskegelschnitte C_I^2 und C_{II}^2 besitzt (vergleiche Art. 4).

Die Ebene des Einen ist die der singulären Erzeugenden $\overline{d_1 c'_1}$, $\overline{d_1 c''_1}$, er berührt diese in den Cuspidalpunkten; die Spitze des g^4 längs ihn berührenden Kegels K_I^2 ist d^2, der Schnitt der zwei andern singulären Geraden $\overline{d_2 c'_2}$, $\overline{d_2 c''_2}$. Die Ebene $(d_2 c'_2 c''_2)$ dieser Geraden schneidet g^4 in dem Kegelschnitt C_{II}^2, in welchem g^4 von dem aus d_1 ihr umschriebenen Kegel K_{II}^2 berührt wird. Und schliesslich, dass g^4 auch als Erzeugniss projectivischer Kegelschnittsbüschel [Art. 7] und ebensolcher Kegelbüschel [Art. 4] erhalten werden kann.

II. Die Fläche mit drei Doppelgeraden.

Art. 9. Bevor wir zu jener Regelfläche vierten Grades mit drei Doppellinien f^4 übergehen, deren Erzeugenden Quadrupeln bilden, haben wir über die allgemeine Fläche f^4 dieser Art Einiges vorauszuschicken.

---

entspricht als Element des Secantensystems dem aus d_1 der R^3 umschriebenen Kegel etc.

Die Ebene $(Pd_1 d_2)$ schneidet h^2 in einem durch P, d_1 und d_2 gehenden Kegelschnitt m^2, dessen Punkte den Punkten der Geraden $\overline{Ps}$ bezüglich R^3 conjugirt sind. (Conjungirte Punkte sind bekanntlich solche, welche auf einer Secante von R^3 liegend, durch diese Curve harmonisch getrennt werden. Durchläuft der eine Punkt eine R^3 nicht schneidende Gerade g, so beschreibt der andere eine Raumcurve dritter Ordnung r^3, welche R^3 viermal schneidet. Und allgemein: ist der Ort des letzteren Punktes eine Raumcurve $3n$-ter Ordnung, welche R^3 $4n$-mal trifft, wenn der erstere eine allgemein gelegene Raumcurve n-ter Ordnung beschreibt. — Kubische Verwandtschaft.)

Das Erzeugniss eines Ebenenbüschels Δ_1 und einer ihm projectivischen, quadratischen Tangentenebenen-Involution J_1^2 auf einem Kegel zweiten Grades K^2 ist dann eine Regelfläche f^4 [mit drei Doppellinien], wenn die durch die Axe Δ_1 und die Spitze O von K^2 bestimmte Ebene das ihr entsprechende Tangentenebenen-Paar von K^2 in zwei zusammenfallenden, d. h. in einer Geraden Δ schneidet. Die Fläche hat Δ zur Doppelerzeugenden[1] und Δ_1, sowie eine in der Involutionsebene [dem Durchschnitt von J_1^2] befindliche Gerade Δ_2 zu Doppelgeraden.

Aus der Gleichartigkeit[2] der Doppelgeraden Δ_1 und Δ_2 erhellt ihre **Vertauschungsfähigkeit** ohne Weiteres, so dass jede als Axe eines Ebenenbüschels betrachtet werden kann, welches mit einer Tangentenebenen-Involution [J_1^2 oder J_2^2], die irgend einen f^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 zum Träger hat, die Fläche erzeugt. Alle derartigen Involutionen, welche Δ_1 entsprechen, haben die Ebene $(\Delta\Delta_2)$ zum Durchschnitt, während jene, welche mit dem Büschel Δ_2 die f^4 erzeugen, $(\Delta\Delta_1)$ zum Durchschnitt haben. Die Fläche f^4 kann auch als das Erzeugniss der in zweideutiger Verwandtschaft stehenden Büschel Δ_1 und Δ_2, in welchen sich die Ebenen $(\Delta_1\Delta)$ und $(\Delta_2\Delta)$ gegenseitig doppelt entsprechen, definirt werden. Sie wird ferner von zwei projectivischen Tangentenebenen-Systemen auf zwei Kegeln zweiten Grades K_1^2 und K_2^2 dann erzeugt, wenn die Zuordnung entsprechender Elemente so getroffen wird, dass je einer durch die Verbindungslinie Δ der Kegelspitzen an K_1^2 gelegten Tan-

---

[1] Dass irgend eine Gerade g, welche Δ schneidet, in ihrem Schnitt P mit dieser, mit g^4 zwei unendlich nahe Punkte gemein hat, weist man mit Hilfe der Abhandlung: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ [Art. 1, 6] nach, indem man, wie dort, zeigt, dass irgend eine durch g gelegte Ebene E die g^4 in einer Curve C_6^4 schneidet, die in P einen Doppelpunkt besitzt. Die Gerade Δ kann nicht von Erzeugenden geschnitten werden. Je zwei Erzeugende, welche in einer Ebene des Büschels Δ_1 liegen, haben einen Schnittpunkt, dessen geometrischer Ort nach (I. A. Art. 1) in der Involutionsebene $(O\Delta)$ liegt, der als Ort des dritten Doppelpunktes von C_6^4 (zwei sind auf Δ_1 und Δ) eine mit Δ_1 windschiefe Gerade ist.

[2] Diese Gerade (Δ_2) ist mit Δ_1 gleichartig, weil sich in jedem ihrer Punkte zwei Erzeugende schneiden und in jeder Ebene ihres Büschels zwei solche liegen, deren Schnitt auf Δ_1 ist.

gentialebene eine durch diese Gerade gehende Berührungsebene von K_2^2 beigeordnet ist, weil die Spitzen aller f^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades auf der Doppelerzeugenden liegen müssen. Reciprok bilden die Ebenen aller f^4 eingeschriebenen Kegelschnitte ein Büschel mit der Axe Δ. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectivischer Punktsysteme auf zwei Kegelschnitten C_1^2 und C_2^2, deren Ebenen sich in einer Geraden Δ schneiden, erfüllen daher nur unter der Voraussetzung, dass je einem Schnittpunkt von Δ mit C_1^2 ein auf Δ befindlicher Punkt von C_2^2 zugeordnet ist, eine Fläche f^4, woraus weiter folgt, dass man durch zwei Kegelschnitte und eine Gerade, welche jeden einmal trifft, zwei Regelflächen f^4 legen kann.[1]

Art. 10. Die Fläche f^4 besitzt zwei Berührungknoten B_1, B_2 — es sind dies die Schnittpunkte von Δ mit Δ_1 und Δ_2 — und vier Cuspidalpunkte c'_1, c''_1, — c'_2, c''_2, welche zu zweien auf Δ_1 und Δ_2 sich befinden und die Verzweigungspunkte der von den Erzeugenden auf diesen Doppellinien gebildeten zwei zweideutigen Reihen sind. Ihnen entsprechen die Doppelpunkte dieser Reihen [so c'_1, c''_1 — d'_1, d''_1 auf Δ_2 und c'_2 c''_2 — d'_2, d''_2 auf Δ_1], mit welchen verbunden, sie die singulären Erzeugenden e'_1, e''_1 — e'_2, e''_2 liefern.[2] Wir wollen kurz e'_1, e''_1 das Δ_1 und e'_2, e''_2 das Δ_2 zugehörige Paar singulärer Erzeugenden nennen; beide Paare sind, wegen der Vertauschungsfähigkeit von Δ_1, Δ_2, gleichartig.

Das in (I. A. Art. 6) gefundene Ergebniss lässt sich nun für f^4 folgendermassen aussprechen:

„Das durch die Doppelerzeugende Δ und ein Paar singulären Erzeugenden bestimmte Hyperboloid π^2 ist der geometrische Ort der Polaren der durch Δ und die dem singulären Erzeugendenpaar zugehörige

---

[1] Prof. Dr. Emil Weyr erhält diese Fläche in der Note *D*: „Die windschiefe Raumcollineation“ [siehe Seite 169 der „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilde etc.“, Leipzig, 1871] als die windschief projicirende Fläche eines Kegelschnittes.

[2] Die reciproken Beziehungen erwähnen wir, wegen Raumersparniss, nicht, und verweisen ausser auf (I. A.) auf den Aufsatz: „Über die Regelfläche mit zwei Doppelgeraden“ in „Hoppes „Archiv“, Jahrg. 1880.

Doppelgerade gelegten Ebene, bezogen auf das System der f^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades."

Die Fläche f^4 besitzt demnach zwei Hyperboloide π_1^2, π_2^2 der eben bezeichneten Art. Jedes spielt nach l. c. aber auch die Rolle des dort $\mathfrak{P}^2$ genannten, einschaligen Hyperboloides, d. h. π_1^2 ist die Polarfläche des Berührungsknotens B_2 und π_2^2 jene von B_1, beide in Bezug auf f^4. Um den Beweis für das letztere kurz zu wiederholen, legen wir aus B_1 an irgend einen f^4 eingeschriebenen Kegelschnitt C^2 die Tangenten. Diese liegen in den Cuspidalebenen des Büschels Δ_1 und in der Ebene η von C^2; ihre Berührungspunkte sind die Schnittpunkte Θ_2', Θ_2'' von η mit e_2' und e_2'', und bilden auf diesen Geraden, wenn η sich um Δ dreht, zwei projectivische Reihen, deren Erzeugniss die Polarfläche von B_1 ist. Diese ist also, als geometrischer Ort der an Δ, e_2' und e_2'' gleitenden Geraden $\overline{\Theta_2'\Theta_2''}$, identisch mit π_2^2.

In liegt auch eine Erzeugende von π_1^2, die Δ, e_1' und e_1'' schneidende Polare $\overline{\Theta_1'\Theta_1''}$ von B_2 bezüglich c^2; sie trifft $\overline{\Theta_2'\Theta_2''}$ in dem Pol w der Geraden Δ, dessen geometrischer Ort Ω, weil er auf π_1^2 und π_2^2 liegt und beide Flächen sich schon in Δ_1, Δ_2, und Δ schneiden, eine gerade Linie ist.

Bemerken wir, dass die Schnittpunkte O_1, O_2 von Δ mit $\overline{\Theta_1'\Theta_1''}$, respective $\overline{\Theta_2'\Theta_2''}$ und w durch Θ_1', Θ_1'', beziehungsweise Θ_2', Θ_2'' harmonisch getrennt werden, so sehen wir auch ein, dass, weil dies für jede Lage von η gilt, die Geraden Ω, Δ sowohl mit e_1', e_1'', als auch mit e_2', e_2'' vier harmonische Erzeugende von π_1^2, beziehungsweise π_2^2 bilden. Wir sehen ferner, dass Ω, als Ort der Pole von Δ bezüglich der C^2, die Δ in dieser Art polar conjugirte Gerade ist. Sie ist aber in analoger [reciproker] Weise, der Doppelerzeugenden Δ auch bezüglich aller K^2 polar conjugirt, und zwar ist sie die Axe des von den Polarebenen der Punkte von Δ bezüglich K^2 gebildeten Büschels. Jede Gerade g, welche Δ und Ω schneidet, hat mit dem in der Ebene $(g\Delta)$ befindlichen Kegelschnitt C^2 zwei Punkte p_1, p_2 gemein, welche durch ihre Schnittpunkte o und w mit Δ, respective Ω harmonisch getrennt werden. Woraus, in Verbindung mit dem in dem Aufsatz: „Über rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen" Gesagten, erhellt, dass irgend eine Ebene E, welche Ω enthält, die Fläche f^4 in einer

Curve C_6^4 schneidet, die auf Δ einen Doppel-Inflexionspunkt besitzt, dass demnach die zwei Haupttangenten von f^4 in einem Punkt von Δ die Gerade Ω treffen. Da umgekehrt die zwei aus w an C^2 gezogenen Tangenten die Haupttangenten von f^4 in den Schnittpunkten von C^2 mit Δ sind, ist klar, dass die zwei Schmiegungshyperboloide von f^4 längs Δ, sich ausser in Δ_1 und Δ_2 in Ω durchschneiden.

„Die zwei Schmiegungshyperboloide der Fläche f^4 längs der Doppelerzeugenden Δ schneiden sich in Δ_1, Δ_2 und einer Geraden Ω, welche mit Δ und jedem Paar singulärer Erzeugenden sich zu vier harmonischen Geraden der durch sie bestimmten Polar-Hyperboloide π_1^2, respective π_2^2 gruppirt. Jede Transversale von Δ und Ω hat mit f^4 zwei weitere Punkte gemein, die durch die genannten zwei Geraden harmonisch getrennt werden.“

Aus diesem Satz folgen für die Inflexionspunkte d_1', d_1'', d_2', d_2'' und die Cuspidalpunkte c_1', c_1'', c_2', c_2'' die Relationen:

$$(c_1', c_1'', B_1, \Omega_1) = (d_1', d_1'', B_2, \Omega_2) = -1,$$
$$(c_2', c_2'', B_2, \Omega_2) = (d_2', d_2'', B_1, \Omega_1) = -1,$$

wenn man mit Ω_1 und Ω_2 die Schnittpunkte von Ω mit Δ_1, beziehungsweise Δ_2 bezeichnet.[1]

Art. 11. Sind die vier Cuspidalpunkte imaginär, so sind alle drei Doppellinien ihrer ganzen Ausdehnung nach eigentlich. Sind sie reell, so kann die Doppelerzeugende — immer ihrer ganzen Länge nach — eigentlich oder ideell sein, je nachdem die Berührungsknoten dem eigentlichen oder ideellen Theil der Doppelgeraden angehören, d. h. ausserhalb oder innerhalb aller der Fläche umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 liegen.

Ist umgekehrt die Doppelerzeugende Δ ideell, so so sind die vier Cuspidalpunkte reell, nachdem Δ innerhalb aller K^2 liegt. Daraus ist weiter zu ersehen (und zwar weil

[1] Weil ein Punkt w von Ω der Pol von Δ, bezüglich des in der Ebene $(w\Delta)$ befindlichen, f^4 eingeschriebenen Kegelschnittes C^2 ist, schneidet die zu Ω parallele Ebene des Büschels Δ die Fläche in einem Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt auf Δ liegt.

innerhalb eines K^2 kein reeller, einfacher Punkt der Fläche sich befinden kann), dass jeder $(f^4_{r,r})$ [siehe I. A. Art. 3] eingeschriebene Kegelschnitt die Doppelerzeugende in imaginären Punkten schneidet,[2] dass ferner jede ebene Curve dritter Ordnung [der Fläche $(f^4_{r,r})$] einen isolirten, auf Δ liegenden Doppelpunkt besitzt, und dass nur diese Fläche eingeschriebene, ebene Curven vierter Ordnung, mit drei isolirten Doppelpunkten enthält.

Ist Δ eine Kante des Trägerkegels K^2 der erzeugenden Tangentenebenen-Involution J^2, so schneidet irgend eine Ebene E die Fläche in einer Curve vierter Ordnung C^4, die den Schnittpunkt δ von E mit Δ zum Doppelpunkt hat und in dem Schnitt T^2 von E und K^2 einen Trägerkegelschnitt besitzt, d. h. einen Kegelschnitt, der mit C^4 acht paarweise zusammenfallende Punkte gemein hat. Da δ sich auf T^2 befindet, ist er nach Art. 12 in: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" und Art. 2 des Aufsatzes: „Über vierfach berührende Kegelschnitte etc." ein Rückkehrpunkt von C^4, und diese Curve von der fünften Classe. Die Rückkehrtangente r bestimmt mit Δ die Berührungsebene ξ der Fläche im Punkte δ; sie ist, als aus der Coincidenz der für die allgemeine Fläche f^4 getrennten Tangentialebenen entstanden, für die besprochene Fläche f^4_c eine Doppelebene des Büschels Δ. Sie hat nur δ zum Berührungspunkt, weil der in ihr liegende Kegelschnitt C^2 durch δ gehend, nicht in das Innere des Kegels K^2 eindringen kann, also Δ im bezeichneten Punkt zur Tangente hat. In Folge dieser Erläuterungen erkennen wir, mit Berücksichtigung von (I. A. Art. 8), in δ einen Cuspidalpunkt und demnach in Δ — dem Ort von δ — eine Cuspidalerzeugende der Regelfläche. Diese ist eine gemeinschaftliche Erzeugende aller f^4_c umschriebener Kegel zweiten Grades und eine Tangente aller eingeschriebenen Kegelschnitte. Die Regelfläche selbst berührt sich in allen Punkten von Δ und hat jede Δ schneidende Gerade zur Tangente; jede ihr eingeschriebene, ebene Curve dritter Ordnung ist auch von der dritten Classe, eine solche Curve vierter Ordnung höchstens von der fünften Classe.

[2] Der in [1] besprochene Kegelschnitt ist daher für $(f^4_{r,r})$ ein Hyperbel.

Aus diesem geht weiter hervor, dass eine Gerade, die an zwei windschiefen Geraden Δ_1, Δ_2 und einen Kegelschnitt C^2, welcher eine Transversale Δ von Δ_1, Δ_2 zur Tangente hat, gleitet, eine Fläche f_c^4 erzeugt, und dass das Erzeugniss zweier projectivischer Punktsysteme auf zwei Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Tangente Δ, die Fläche f_c^4 ist, wenn sich die Berührungspunkte entsprechen. Auch die zwei folgenden Entstehungsarten finden ihre Begründung in dem oben Gesagten:

„Dreht sich ein Kegelschnitt C^2 um eine Gerade Δ seiner Ebene E, Δ in dem E projectivisch entsprechenden Punkt δ berührend, und gleitet er an drei untereinander und gegen Δ windschiefen Geraden, so ist sein geometrischer Ort eine Regelfläche f_c^4."

„Ordnen wir in einem Ebenenbüschel Δ_1 (oder Δ_2) und einer ihm projectivischen Tangentenebenen-Involution J^2 auf einem Kegel zweiten Grades K^2 der durch die Spitze O von K^2 bestimmten Ebene $(\Delta_1 O)$ jene, als Element von J^2 doppelt zu zählende Tangentialebene von K^2 zu, die diesen Kegel in einer seiner Schnitterzeugenden Δ mit $(\Delta_1 O)$ tangirt, so ist das Erzeugniss dieser Gebilde eine Fläche f_c^4."

Art. 12. Nach diesen Auseinandersetzungen können wir jene Regelfläche mit drei Doppellinien (φ^4), deren Erzeugende sich zu Quadrupeln gruppiren, als eine Specialität von G^4 und f^4, kurz besprechen.

So entnehmen wir den zwei ersten Artikeln, weil die Spitzen aller φ^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 mit Δ_1 und Δ_2 nur je eine Ebene $(\Delta_1 \Delta)$, respective $(\Delta_2 \Delta)$ fixiren, dass diese Ebenen einander bezüglich aller K^2 polar conjugirt sein müssen, wenn die Erzeugenden auf den Doppelgeraden projectivische, quadratische Involutionen bestimmen:

„Sind die zwei durch die Doppelerzeugende Δ und je eine Doppelgerade Δ_1, Δ_2 der Regelfläche φ^4 bestimmten Ebenen $(\Delta_1 \Delta)$ und $(\Delta_2 \Delta)$ bezüglich eines — also auch aller — der Fläche umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 einander polar conjugirt, so bestimmen die Erzeugenden auf den Doppelgeraden

quadratische und projectivische Involutionen und gruppiren sich zu Quadrupeln. Und umgekehrt."

Von den vier Doppelpunkten der zwei projectivischen Punkt-Involutionen Δ_1 (α) und Δ_2 (β) entsprechen sich zwei, sie sind die Berührungsknoten B_1, B_2 der Fläche, und ihre Verbindungslinie Δ die Doppelerzeugende. Die zwei andern Doppelpunkte sind die Doppel-Inflexionspunkte d_1 und d_2 von φ^4; ihnen sind die Cuspidalpunkte c'_1, c''_1, beziehungsweise c'_2, c''_2 zugeordnet, welche, wie jedes Punktepaar einer Involution, durch B_1 und d_1, respective durch B_2 und d_2 harmonisch getrennt werden. Die Verbindungslinie $\overline{d_1 d_2}$ ist, wie aus dem Gesagten erhellt, die in Art. 10 mit Ω bezeichnete Gerade, welche der Doppelerzeugenden Δ bezüglich der Regelfläche polar conjugirt ist. Jede Ebene E ihres Büschels schneidet φ^4 in einer Curve vierter Ordnung C^4_6, deren sämmtliche Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind und bestimmt auf Δ_1, Δ_2, Δ die Punkte d_1, d_2, d, welche ein gemeinschaftliches Polardreieck aller Kegel K^2 fixiren.[1] Dieses Dreieck ist sich auch bezüglich der Curven C^4_6 selbst conjugirt,[1] d. h. jeder Eckpunkt ist der Pol der Gegenseite in Bezug auf C^4_6, und daher die Ebenen ($d_2 \Delta$) und ($d_1 \Delta$) die Polarebenen von d_1, beziehungsweise d_2 bezüglich φ^4; nachdem der Ort von d — bei Drehung der Ebene E — Δ ist:

„Die Ebene ($\Delta\Delta_2$) der Doppelerzeugenden Δ und der Doppelgeraden Δ_2 ist die Polarebene des auf der andern Doppelgeraden Δ_1 liegenden Doppel-Inflexionspunktes d_1, sowohl bezüglich der Fläche selbst, als auch aller ihr umschriebenen Kegel zweiten Grades. Dieselbe Beziehung besteht zwischen d_2 und ($\Delta\Delta_1$)."

---

[1] Siehe Schluss von Art. 2, dann: „Über rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangente etc." und in „Über rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung" die Anmerkung zu Art. 5. Aus diesen Arbeiten folgt, dass, wenn d_1 und d_2 eigentliche Doppelpunkte von C^4_6 [also auch von φ^4] sind, d und mithin Δ ideell ist, und dass d_1 oder d_2 isolirt sein muss, wenn Δ eigentlich ist; in diesem Fall sind c'_2, c''_2 oder c'_1, c''_1 imaginär.

Art. 13. Die Doppelgerade Δ_2 schneidet alle Kegel K^2 in denselben zwei Punkten, den Cuspidalpunkten c'_2, c''_2, in welchen die K^2 von den zwei singulären Erzeugenden e'_2, e''_2 tangirt werden, die sich im Doppel-Inflexionspunkte d_1 schneiden. Bezeichnen wir die Spitze irgend eines der Kegel K^2 mit d, so sind $\overline{dc'_2}$ und $\overline{dc''_2}$ die Berührungskanten der sich in $\overline{d_1d}$ schneidenden Tangentialebenen (e'_2d), respective (e''_2d). Sie liegen in der Ebene $(\Delta_2\Delta)$, und $\overline{d_1d}$ ist daher die auf K^2 bezogene Polare von Δ_2. Durchläuft d die Gerade Δ, so beschreibt $\overline{d_1d}$ das Büschel d_1 $(\Delta_1\Delta)$:

„Die reciproken Polaren einer Doppelgeraden (Δ_2) bezüglich des Systems der der Fläche φ^4 umschriebenen Kegel zweiten Grades K^2 bilden ein Strahlenbüschel, welches den auf der zweiten Doppelgeraden (Δ_1) befindlichen Doppel-Inflexionspunkt (d_1) zum Scheitel und die durch diesen und die Doppelerzeugende bestimmte Ebene $(\Delta_1\Delta)$ zum Träger hat[1].“

Je zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, welche sich in einem Punkte α der Geraden Δ schneiden, bestimmen auf Δ_2 zwei Punkte β', β'' die durch B_2 und d_2 harmonisch getrennt werden. Es bilden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$ selbst mit den in den Doppelebenen (Δ_1B_2), (Δ_1d_2) des Büschels Δ_1 und der Ebene $(\mathfrak{e}'\ \mathfrak{e}'')$ liegenden Geraden einen harmonischen Vierstrahl. Der Erzeugenden $\mathfrak{e}'$ ist in dieser Weise nicht nur $\mathfrak{e}''$, sondern bezüglich $(\Delta_2\ B_1)$ und $(\Delta_2\ d_1)$, in analoger Weise, $\mathfrak{e}'$, conjugirt — alle drei Erzeugenden gehören einem Quadrupel an:

„Die Doppelebenen des Büschels einer Doppelgeraden trennen die Fläche φ^4 harmonisch.“

Die Ebenen (Δ_1B_2) und (Δ_2B_1) schneiden sich in Δ, die Ebenen $(\Delta_1\,d_2)$ und $(\Delta_2\,d_1)$ in $\overline{d_1d_2}$, einer Geraden, von der wir im vorhergehenden Artikel sagten, dass sie mit Δ polar conjugirt sei. Jede Gerade, welche sie und Δ schneidet, trifft, nach dem letzten Satz und auch nach Art. 10, φ^4 nach in zwei bezüglich Δ, $\overline{d_1d_2}$ harmonisch zugeordneten Punkten.

Art. 14. Wie die Kegelschnitte der Fläche G^4 [Art. 4 und 8], gruppiren sich auch jene der Fläche φ^4 zu Paaren. Je zwei — so vereinigte — Kegelschnitte C^2 und C^2_1 schneiden Δ in denselben

[1] Siehe Beginn von Art. 2 und Art. 10 und (I. A. Art. 6).

zwei Punkten d', d'' der Involution, mit den Doppelpunkten B_1, B_2. Ihre Tangenten t'_1, t'_2, — t''_1, t''_2 in diesen Punkten sind Haupttangenten der Regelfläche und schneiden sich [nach Art. 10] paarweise, und zwar t'_1 mit t''_1 und t'_2 mit t''_2 in den Punkten w, respective w_2 der Geraden $\overline{d_1 d_2}$, auf welcher diese eine Involution, mit den Doppelpunkten d_1, d_2 beschreiben. Die Gerade $\overline{d_1 d_2}$ ist daher die reciproke Polare von Δ bezüglich jeder Fläche zweiten Grades, die durch C^2 und C_1^2 gelegt werden kann:

„Die Doppelerzeugende Δ und die Verbindungslinie $\overline{d_1 d_2}$ der Doppel-Inflexionspunkte sind reciproke Polaren in Bezug auf jede Fläche zweiter Ordnung, welche mit φ^4 zwei ein Paar bildende, eingeschriebene Kegelschnitte, oder (reciprok) zwei so conjugirte, umschriebene Kegel zweiten Grades — in derselben Eigenschaft — gemeinschaftlich hat."

Die zwei Haupttangenten t'_1, t'_2 in d' sind die Doppelpunktstangenten der Berührungscurve B^4 des aus d' der φ^4 umschriebenen Kegel K^2. Sie werden durch $\overline{d'd_1}$ und $\overline{d'd_2}$ harmonisch getrennt. Die Geraden t'_1, t''_1, welche sich in w treffen, sind Rückkehrkanten jenes Kegels K_4^6, welcher φ^4 aus w_1 projicirt; dieser berührt die Fläche in einer Curve sechster Ordnung und sechsten Ranges, welche in den vier Cuspidalpunkten Rückkehrpunkte besitzt. [Vergl. I. A. Art. 4.]

Die auf irgend einen Kegelschnitt C^2 [der Fläche φ^4] bezogene Polare $\mathfrak{p}$, des Berührungsknotens B_1, läuft durch den B_1 rücksichtlich d', d'' conjugirten Punkt B_2 und schneidet die singulären Erzeugenden e'_2, e''_2 [siehe Art. 10]; erfüllt also ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel B_2 und der Ebene $(e'_2 e''_2)$:

„Die Polaren eines Berührungsknotens der Fläche φ^4 in Bezug auf das System der ihr eingeschriebenen Kegelschnitte bilden ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der andere Berührungsknoten ist und dessen Ebene die durch den Pol gehende Doppelgerade enthält."

Die Ebene $(e'_1 e''_1)$ ist daher die Polarebene von B_2 und $(e'_2 e''_2)$ jene von B_1 bezüglich φ^4. Diese Ebenen, welche wir auch Doppel - Rückkehrtangentenebenen von nennen könnten, schneiden nach Art. 7 die der Fläche umschriebenen Kegel

zweiten Grades K^2 in zwei derartigen projectivischen Kegelschnittsbüscheln, dass zwei entsprechende ein Kegelpaar K^2 und K_1^2 fixiren. Umgekehrt kann, wie wir erklären werden, φ^4 immer als Erzeugniss zweier gleichartiger, projectivischer Kegelschnittsbüschel erhalten werden — nur müssen gewisse Einschränkungen in der Annahme dieser Gebilde gemacht werden.

Wir wählen zwei windschiefe Gerade Δ_1 und Δ_2 zu Doppellinien, eine sie in B_1, respective B_2 schneidende Gerade Δ zur Doppelerzeugenden, die Punkte d_1, d_2 auf Δ_1, beziehungsweise Δ_2 zu Doppel-Inflexionspunkten und die vier Cuspidalpunkte c_1', c_1'', c_2' und c_2'' derart, dass $(B_1, d_1, c_1', c_1'') = (B_2, d_2, c_2', c_2'') = -1$ ist. Irgend ein Kegelschnitt z^2, welcher in den Punkten c_1', c_1'' die singulären Erzeugenden $\overline{c_1' d_2}$ und $\overline{c_1'' d_2}$ zu Tangenten hat, wird — in Folge der Annahme — die Gerade $\overline{d_1 d_2}$ in zwei Punkten w_1 und w_2 schneiden, welche durch d_1 und d_2 harmonisch getrennt werden und durch die — aus demselben Grund — ein Kegelschnitt z_2 läuft, der $\overline{d_1 c_2'}$, $\overline{d_1 c_2''}$ in c_2', respective c_2'' berührt. Dieser Kegelschnitt fixirt mit dem ersten zwei Kegel K^2 und K_1^2, deren Spitzen d' und d'' sich auf Δ befinden, weil — ebenfalls in Folge der gemachten Prämissen — $\overline{d_1 d_2}$ die Polare von B_1 bezüglich z^2 und die Polare von B_2 bezüglich z^2 ist, also die Tangenten der Kegelschnitte in w_1 und w_2 sich paarweise in B_1 und B_2 begegnen. Da die Punkte d' und d'', weil in jedem nur ein Kegel der bezeichneten Art[1] seine Spitze hat, eine Involution mit den Doppelpunkten B_1, B_2 bilden, ist die Identität des Kegel K^2 mit den, aus Punkten von Δ der Fläche φ^4 umschriebenen Kegel nachgewiesen, und daher auch gezeigt, dass das Erzeugniss der Kegelschnittsbüschel (z^2) und (z_2) diese Fläche ist.

Dieser Erklärung entnehmen wir, dass φ^4 auch das Erzeugniss eines Kegelschnittsbüschels (z^2) und einer ihm projectivischen, geraden Punkt-Involution $\Delta(d', d'')$

[1] Nämlich ein Kegel, der irgend zwei entsprechende Kegelschnitte und z_2 enthält. Er ist durch Angabe seiner Spitze d' vollkommen bestimmt, weil er die Ebenen $(d' d_1 c_2')$, $(d' d_1 c_2'')$, $(d' d_2 c_1')$ und $(d' d_2 c_1'')$ längs den, nach den Cuspidalpunkten aus d' gezogenen Geraden berühren muss, und desshalb mit dem aus d' der Fläche φ^4 umschriebenen Kegel — der dieselben Bedingungen zu erfüllen hat — identisch ist.

ist, und dass die Allgemeinheit dieser Entstehungsart bloss insoferne beschränkt wird, als der eine Doppelpunkt B_1 der Involution auf der Berührungssehne $\overline{c'_1 c''_1} \equiv \Delta_1$ liegend, dieser entsprechen muss, und der zweite Doppelpunkt B_2 derselben dem (auch dem Büschel (z^2) angehörigen) aus den allen z^2 gemeinschaftlichen Tangenten $\overline{d_2 c'_1}$ und $\overline{d_2 c''_1}$ bestehenden Kegelschnitt zugeordnet werden muss. Alle weiteren Lagen-Relationen sind allgemein.

Reciprok bilden die aus den zwei Doppel-Inflexionspunkten d_1 und d_2 den Kegelschnitten der Fläche φ^4 umbriebenen Kegel $(\mathfrak{k}^2)$, $(\mathfrak{k}_2)$ zwei gleichartige, projectivische Büschel, welche die Fläche längs den singulären Erzeugenden e'_1, e''_1, beziehungsweise e'_2, e''_2 berühren. Jedes dieser Kegelbüschel erzeugt mit der durch die Ebenen conjugirter Kegelschnitte (C^2, C^2_1) gebildeten quadratischen Involution auf Δ, die Fläche φ^4, — welche in dieser Art als Ort eines Kegelschnittes C^2 definirt erscheint. Bezüglich der Annahme der Träger dieser Gebilde und der Zuordnung ihrer Elemente, gelten den obigen reciproke Bestimmungen. Wie in diesen vier letzten, die Entstehungsarten von φ^4 betreffenden Theoremen, kann auch in allen anderen (der erwähnten Art) die Conclusion mit der Hypothesis vertauscht werden.

Art. 15. Auch unter den Fusspunktflächen der Kegel zweiten Grades K^2_0, den Fusspunktregelflächen, finden wir Specialitäten, welche sich der in diesem Aufsatz behandelten Flächen gattung einreihen lassen.

Im Allgemeinen definiren wir eine Fusspunktregelfläche F^4_0 als den geomet. Ort der Schnittlinie $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ einer sich um eine feste Gerade Δ drehenden Ebene ε mit jenen Tangentialebenen τ', τ'' des Kegels K^2_0, welche auf ihr senkrecht stehen. Diese Ebenen bi den auf K^2_0 eine mit Δ (ε) projectivische Involution, mit einer auf Δ senkrechten Involutionsebene Der Doppelkegelschnitt D ist ein Kreis, welcher die Spitze des Grundkegels K^2_0 und den Schnitt seiner Ebene ε_i mit Δ (den Berührungsknoten B der Fläche) zu diametral gegenüberliegenden Punkten hat. Ist die Ebene ε_i parallel zu einem System von Kreisschnitten des Kegels K^2_0, so sind die unendlich fernen Punkte des Doppelkreises D Cuspidalpunkte der Fläche, und jede Ebene des erwähnten Systemes bestimmt auf ihr eine „Limaçon des Pascal“.

Sind auch noch die Ebenen $(\Delta\delta)$ und ε_i einander bezüglich K_0^2 polar conjugirt, so gruppiren sich die Erzeugenden der Fläche zu Quadrupeln und bestimmen auf Δ und D quadratische Involutionen. Der Kegel K_0^2 berührt sie in einem Kreis, dessen Ebene parallel zu (D) und dessen Mittelpunkt der Doppel-Inflexionspunkt d dieser Fläche G_0^4 ist. (Siehe Art. 4.) Die Ebene dieses Berührungskreises ist eine Asymptotenebene des von den Ebenen der Kegelschnitte der Fläche G_0^4 umhüllten Doppel-Cylinders $\mathfrak{K}^2$. Die Ebene $(\Delta\delta)$ ist eine Doppelebene des Büschels Δ (ε), sie steht auf der zweiten Doppelebene — (ΔT) der Tangentialebene in B — senkrecht, halbirt den Winkel irgend zweier G_0^4 in einem Punkt von Δ berührenden Ebenen und ist daher eine Symmetralebene dieser Fläche etc.